

ENONCE :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$, et pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2}$$

Calculer les trois premiers termes.

Quelle conjecture peut-on faire concernant l'expression de U_n ?

Démontrer ce résultat.

Éléments de correction

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$, et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2}$

$$U_0 = U_1 = U_2 = 2.$$

On conjecture l'égalité $U_n = 2$.

Démontrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2$.

Considérons la propriété : $\mathcal{P}_n$: « $U_n = 2$ ».

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $U_0 = 2$.
- Nous allons démontrer maintenant que : *si $\mathcal{P}_p$ est vraie alors $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.*

Supposons que $\mathcal{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel p . Alors $U_p = 2$.

$$U_{p+1} = \frac{3}{4}U_p + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2} = 2. \quad \mathcal{P}_{p+1} \text{ est donc vraie.}$$

La propriété est donc héréditaire.

CONCLUSION : Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}_n$ est vraie.